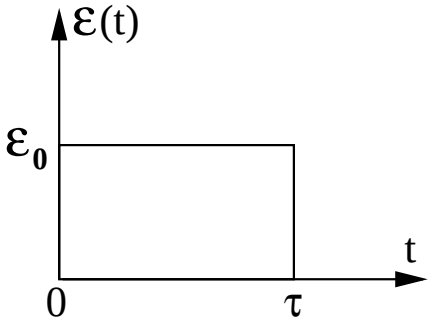
Blatt 9 Abgabe: **Dienstag, 16.06.15** vor der Vorlesung

Aufgabe 25 *Nochmal zeitabhängige Störungstheorie*

Ein Teilchen der Masse m und der Ladung q bewegt sich in einer Dimension. Anfänglich ist das Teilchen an ein $\delta-$Potential im Ursprung gebunden. Im Zeitraum von $t = 0$ bis $t = \tau$ wirkt ein elektrisches Feld der Stärke $\mathcal{E}_0$ in x-Richtung auf das Teilchen (siehe Abbildung). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $P(E_k)dE_k$, dass das Teilchen für $t > \tau$ in einem ungebundenen Zustand mit einer Energie im Intervall $[E_k, E_k + dE_k]$ anzutreffen ist?



Folgende Lösungsstrategie bietet sich an:

a) Berechnen Sie zuerst die normierte Wellenfunktion $\psi(x)$ für das an das (attraktive) $\delta-$Potential, $V(x) = -A\delta(x)$, gebundene Teilchen.

b) Approximieren Sie die ungebundenen Zustände, also die Zustände für $E > 0$, durch freie Zustände (d.h. setzen Sie $V = 0$) in einem Intervall der Länge L. Nehmen Sie periodische Randbedingungen an. Berechnen Sie die normierten Wellenfunktionen $\psi_k(x)$ zur Wellenzahl k und die dazugehörigen Zustandsdichten $D(k)$ und $D(E_k)$.

   Hinweis: Die zulässigen Wellenzahlen sind gegeben durch $k_n = 2\pi n/L$. Die Zustandsdichte $D(k) = 1/\Delta k = L/2\pi$. Mit Hilfe der Dispersion eines freien Teilchens, $E_k = \hbar^2 k^2/2m$, läßt sich $D(E_k)$ dann aus der Identität $D(k)dk = D(E_k)dE_k/2$ berechnen wobei der Faktor $1/2$ der Tatsache Rechnung trägt, dass E_k für $k \neq 0$ zweifach entartet ist.

c) Das elektrische Feld soll schwach sein, sodass Dirac's Störungsrechnung erster Ordnung ausreicht. Geben Sie den Hamilton Operator H_1 der Störung an und berechnen Sie die Matrikelemente $\langle 0|H_1|k\rangle$.

   Hinweis: Bei der Berechnung der Matrixelemente können Sie annehmen, dass L sehr viel größer ist als die Ausdehnung der Wellenfunktion zur Zeit $t = 0$. Es kann deshalb von $x = -\infty$ bis $x = \infty$ integriert werden. Die Matrixelemente, die Sie so erhalten, hängen zwar dann immer noch von L ab, was aber nicht schlimm ist, denn am Ende, d.h. im Ausdruck für $P(E_k)dE_k$, kürzt sich die Abhängigkeit von L weg.

d) Die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang zwischen einem Anfangszustand $|i\rangle$ und einem Endzustand $|f\rangle$ aufgrund einer schwachen Störung $H_1(t)$ ist gegeben durch

$$P_{fi}(t) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{-\infty}^{t}\langle f|H_1(t')|i\rangle \exp[i\omega_{fi}t']dt'\right|^2 ,$$

   wobei $\omega_{fi} = (E_f - E_i)/\hbar$. Benutzen Sie diese Formel um einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit $P(E_k)dE_k$ herzuleiten.

(12 Punkte)

Aufgabe 26 *Kohärente Zustände*

In der Vorlesung wurde der harmonische Oszillator durch Einführen der zueinander adjungierten Kletteroperatoren b, $b^\dagger$ mit $[b, b^\dagger] = 1$ algebraisch behandelt. Hier sollen die Eigenzustände $|\phi_\beta\rangle$ des Operators b zum Eigenwert β untersucht werden. Diese Zustände nennt man auch kohärente Zustände.

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und (normierte!) Eigenvektoren von b aus einer Entwicklung

$$|\phi_\beta\rangle = \sum_n c_n(\beta)|n\rangle$$

nach Eigenzuständen $|n\rangle = \frac{(b^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$ des harmonischen Oszillators.

b) Bestimmen Sie Mittelwert und Varianz der Energie des harmonischen Oszillators im Zustand $|\phi_\beta\rangle$.

c) Berechnen Sie $\langle\phi_\alpha|\phi_\beta\rangle$ und diskutieren Sie das Ergebnis.

d) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich der Oszillator im Zustand $|\psi(t = 0)\rangle = |\phi_\beta(t = 0)\rangle$. Bestimmen Sie die Zeitabhängigkeit der Erwartungswerte des Orts- und Impulsoperators, indem Sie zunächst nachweisen, daß $|\psi(t)\rangle = |\phi_\beta(t)\rangle \propto |\phi_{\beta(t)}\rangle$ mit entsprechendem $\beta(t)$ ist.

(12 Punkte)