Blatt 6 Abgabe: **Mittwoch, 18.05.11** vor der Vorlesung

Aufgabe 15 *Freies Teilchen*

Betrachten Sie für $t \geq 0$ ein freies Teilchen der Masse m das sich im eindimensionalen Raum bewegt. Zur Zeit $t = 0$ sei die Wellenfunktion des Teilchens $\psi(x, 0)$.

a) Zeigen Sie, dass für hinreichend lange Zeiten t die Wellenfunktion des Teilchens zerläuft und die Gestalt

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{m}{\hbar t}} \exp\left[-i\frac{\pi}{4}\right] \exp\left[\frac{imx^2}{2\hbar t}\right] \phi\left(\frac{mx}{\hbar t}\right)$$

annimmt, wobei

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \psi(x,0) \exp[-ikx]$$

die Fourier Transformierte der Anfangswellenfunktion ist.

b) Geben Sie für sehr große Zeiten t eine plausible Interpretation von $|\psi(x,t)|^2$ an.

<u>Hinweis:</u> Benutzen Sie an einer geeigneten Stelle

$$\exp[-i\alpha u^2] \to \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\delta(u) \quad \text{für} \quad \alpha \to \infty\ .$$

(10 Punkte)

Aufgabe 16 *Komplexes Potential*

Lösen Sie die eindimensionale Schrödinger Gleichung mit $V(x) = -iV \ll E$. Berechnen Sie den dazugehörigen Wahrscheinlichkeitsstrom,

$$j(x) = \mathrm{Re}\left(\psi^* \frac{\hat{p}}{m}\psi\right)\ ,$$

und zeigen Sie, daß ein komplexes Potential die Absorption eines Teilchens beschreibt. Finden Sie schließlich einen Ausdruck für den Absorptionskoeffizienten.

(4 Punkte)

Aufgabe 17 *Rechnen mit Operatoren*

Ist L ein beliebiger Operator, so bezeichnet $L^\dagger$ den zugehörigen adjungierten Operator, d.h. $\langle\phi|L\psi\rangle = \langle L^\dagger\phi|\psi\rangle$, und L^{-1} seine Inverse, d.h. $L^{-1}L = LL^{-1} = 1$ mit 1 als der Identität.

(a) Gegeben seien hermitesche Operatoren H und K (d.h. $H^\dagger = H$), sowie ein unitärer Operator U (d.h. $U^\dagger = U^{-1}$). Zeigen Sie, daß folgende Operatoren hermitesch sind:

(i) $HK + KH$ (ii) $\mathrm{i}[H,K] = \mathrm{i}(HK - KH)$

(iii) UHU^{-1} (iv) $\mathrm{i}\,\dfrac{U-1}{U+1}$

(b) Betrachten Sie den linearen Operator $A = c_1 + c_2 x$, mit c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$. Welche Bedingungen müssen c_1 und c_2 erfüllen, damit A hermitesch ist?

(c) Gegeben seien Operatoren C und D, für deren Kommutator $[D, C] = (DC - CD) = 1$ gelte. Beweisen Sie

$$e^{aC} D e^{-aC} = D - a1 \qquad \forall\, a \in \mathbb{C}\,.$$

(d) Beweisen Sie für einen beliebigen Operator L:

  (i) Falls L^{-1} existiert, so besitzen L und L^{-1} ein gemeinsames Eigenfunktionensystem.

  (ii) Besitzt L die Eigenschaft $[L, L^\dagger] = LL^\dagger - L^\dagger L = 0$, so existiert ein gemeinsames Eigenfunktionensystem von L und $L^\dagger$.

  In welcher Beziehung stehen die Eigenwerte von L, $L^\dagger$ und L^{-1}?

(e) Zeigen Sie, daß die Eigenwerte eines unitären Operators U vom Betrag 1 sind.

Hinweis: Funktionen von Operatoren werden durch Einsetzen des Operators in die Potenzreihenentwicklung der Funktion erklärt.

(8 Punkte)