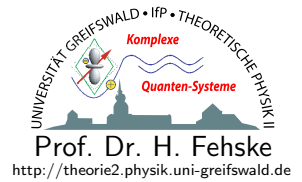




# Übungen zur Quantenmechanik (T3)

SS 2011



Prof. Dr. H. Fehske  
<http://theorie2.physik.uni-greifswald.de>

Blatt 6

Abgabe: **Mittwoch, 18.05.11** vor der Vorlesung

## Aufgabe 15 *Freies Teilchen*

Betrachten Sie für  $t \geq 0$  ein freies Teilchen der Masse  $m$  das sich im eindimensionalen Raum bewegt. Zur Zeit  $t = 0$  sei die Wellenfunktion des Teilchens  $\psi(x, 0)$ .

- a) Zeigen Sie, dass für hinreichend lange Zeiten  $t$  die Wellenfunktion des Teilchens zerläuft und die Gestalt

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{m}{\hbar t}} \exp\left[-i\frac{\pi}{4}\right] \exp\left[\frac{imx^2}{2\hbar t}\right] \phi\left(\frac{mx}{\hbar t}\right)$$

annimmt, wobei

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \psi(x, 0) \exp[-ikx]$$

die Fourier Transformierte der Anfangswellenfunktion ist.

- b) Geben Sie für sehr große Zeiten  $t$  eine plausible Interpretation von  $|\psi(x, t)|^2$  an.

Hinweis: Benutzen Sie an einer geeigneten Stelle

$$\exp[-i\alpha u^2] \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \delta(u) \quad \text{für } \alpha \rightarrow \infty.$$

(10 Punkte)

## Aufgabe 16 *Komplexes Potential*

Lösen Sie die eindimensionale Schrödinger Gleichung mit  $V(x) = -iV \ll E$ . Berechnen Sie den dazugehörigen Wahrscheinlichkeitsstrom,

$$j(x) = \text{Re}\left(\psi^* \frac{\hat{p}}{m} \psi\right),$$

und zeigen Sie, daß ein komplexes Potential die Absorption eines Teilchens beschreibt. Finden Sie schließlich einen Ausdruck für den Absorptionskoeffizienten.

(4 Punkte)

## Aufgabe 17 *Rechnen mit Operatoren*

Ist  $L$  ein beliebiger Operator, so bezeichnet  $L^\dagger$  den zugehörigen adjungierten Operator, d.h.  $\langle \phi | L \psi \rangle = \langle L^\dagger \phi | \psi \rangle$ , und  $L^{-1}$  seine Inverse, d.h.  $L^{-1}L = LL^{-1} = 1$  mit 1 als der Identität.

- (a) Gegeben seien hermitesche Operatoren  $H$  und  $K$  (d.h.  $H^\dagger = H$ ), sowie ein unitärer Operator  $U$  (d.h.  $U^\dagger = U^{-1}$ ). Zeigen Sie, daß folgende Operatoren hermitesch sind:

(i)  $HK + KH$       (ii)  $i[H, K] = i(HK - KH)$

(iii)  $UHU^{-1}$       (iv)  $i \frac{U - 1}{U + 1}$

- (b) Betrachten Sie den linearen Operator  $A = c_1 + c_2x$ , mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ . Welche Bedingungen müssen  $c_1$  und  $c_2$  erfüllen, damit A hermitesch ist?

- (c) Gegeben seien Operatoren  $C$  und  $D$ , für deren Kommutator  $[D, C] = (DC - CD) = 1$  gelte. Beweisen Sie

$$e^{aC} D e^{-aC} = D - a1 \quad \forall a \in \mathbb{C}.$$

- (d) Beweisen Sie für einen beliebigen Operator  $L$ :

- (i) Falls  $L^{-1}$  existiert, so besitzen  $L$  und  $L^{-1}$  ein gemeinsames Eigenfunktionensystem.
- (ii) Besitzt  $L$  die Eigenschaft  $[L, L^\dagger] = LL^\dagger - L^\dagger L = 0$ , so existiert ein gemeinsames Eigenfunktionensystem von  $L$  und  $L^\dagger$ .

In welcher Beziehung stehen die Eigenwerte von  $L$ ,  $L^\dagger$  und  $L^{-1}$ ?

- (e) Zeigen Sie, daß die Eigenwerte eines unitären Operators  $U$  vom Betrag 1 sind.

Hinweis: Funktionen von Operatoren werden durch Einsetzen des Operators in die Potenzreihenentwicklung der Funktion erklärt.

(8 Punkte)