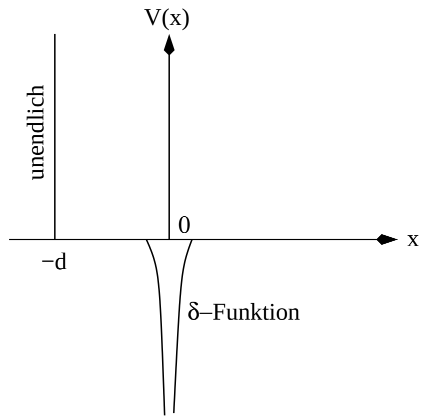
Blatt 4 Abgabe: **Mittwoch, 04.05.11** vor der Vorlesung

Aufgabe 9 *δ-Potential*

Um das Verhalten eines Atoms vor einer Oberfläche qualitativ zu verstehen, soll im Folgenden ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m betrachtet werden, das sich in dem eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} -V_0\delta(x) & x > -d \\ \infty & x < -d \end{cases}$$

bewegt, wobei $\delta(x)$ die δ-Funktion ist (siehe nebenstehende Skizze).



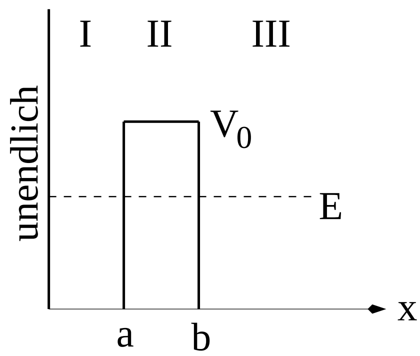
a) Berechnen Sie die Modifikation der Bindungsenergie durch die Wand für den Fall dass das Teilchen hinreichend weit von der Wand entfernt ist. Was bedeutet "hinreichend weit entfernt".

b) Welcher Beziehung müssen V_0 und d genügen damit es mindestens einen Bindungszustand gibt?

(8 Punkte)

Aufgabe 10 *Eindimensionale Streuung (Präsenzübung)*

Berechnen Sie für das nebenstehene Potential die Streulösung für ein von rechts einfallendes Teilchen mit der Energie $0 < E < V_0$. Dazu ist folgendes Vorgehen zweckmäßig:



a) Setzen Sie die Wellenfunktionen in den Bereichen I, II und III an als

$$\begin{aligned} \psi_I &= A\sin(kx) \\ \psi_{II} &= B_1\exp[K(x-a)] + B_2\exp[-K(x-a)] \\ \psi_{III} &= \exp[-ik(x-b)] + C\exp[ik(x-b)] \end{aligned}$$

mit $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ und $K = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$. Wie lautet das aus den Stetigkeitsforderungen resultierende Gleichungssystem?

b) Eliminieren Sie aus diesem Gleichungssystem B_1 und B_2 und berechnen Sie A und C. Was gilt für $|C|$?

<u>Ergebnis für A:</u>

$$A = 4\left[(1-\frac{K}{ik})(\sin(ka)+\frac{k}{K}\cos(ka))e^{K(b-a)} + (1+\frac{K}{ik})(\sin(ka)-\frac{k}{K}\cos(ka))e^{-K(b-a)}\right]^{-1}$$

c) Diskutieren und skizzieren Sie $|A|^2/|C|^2$ für Spezialfälle $w = (b-a)/a = 1$, $\tilde{V}_0 = 2ma^2V_0/\hbar^2 = 3$ und $w = 0.1$, $\tilde{V}_0 = 40$. Benutzen Sie die dimensionslose Energievariable $\epsilon = 2ma^2E/\hbar^2$. Ist Quantenmechanik nicht wunderbar!

(12 Punkte)

Aufgabe 11 *Qualitative Überlegungen*

Aufgrund des asymptotischen Verhaltens des Potentials lassen sich schon qualitative Aussagen über die Zustände machen.

a) Die zeitunabhängigen Wellenfunktionen, d.h. die Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger Gleichung,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\Big[E - V(x)\Big]\psi(x) = 0 \ ,$$

sind entweder gebundene oder ungebundene Zustände, je nachdem ob sie für $x \to \pm\infty$ verschwinden oder beschränkt sind. Nehmen Sie an, dass $\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = V_\pm$ existiert und dass $V_+ < V_-$. Entscheiden Sie, ob ein Zustand mit der Energie E gebunden ist oder nicht, wenn (1) $E > V_-$, (2) $V_- > E > V_+$ bzw. (3) $V_+ > E$ ist.

b) Das Oszillationstheorem besagt dass wenn die diskreten Eigenwerte einer eindimensionalen Schrödinger Gleichung ihrer Größe nach wie folgt angeordnet werden,

$$E_1 < E_2 < ... < E_n < ... \ ,$$

die dazugehörigen Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ nach der Anzahl ihrer Nullstellen geordnet sind. Die n-te Eigenfunktion hat dabei $n-1$ Nullstellen. Zeigen Sie, dass zwischen zwei beliebigen aufeinanderfolgenden Nullstellen der n-ten Eigenfunktion die $(n+1)$-te Eigenfunktion mindestens eine Nullstelle hat.

Hinweis: Berechnen Sie dazu $\psi_n'\psi_{n+1} - \psi_{n+1}'\psi_n|_\alpha^\beta$ in einem geeigneten Intervall $[\alpha, \beta]$.

(8 Punkte)