Blatt 11 Abgabe: **Donnerstag, 23.06.11** vor der Vorlesung

Aufgabe 29 *Harmonischer Oszillator*

In der Vorlesung wurde der eindimensionale harmonische Oszillator behandelt. Der Zustand $\psi_n = (b^\dagger)^n \psi_0/\sqrt{n!}$ ist der $(n+1)$-te normierte Eigenzustand zu

$$H = \frac{p^2}{2M} + \frac{M\omega^2 x^2}{2} = \hbar\omega\big(b^\dagger b + \frac{1}{2}\big) \ .$$

Es gilt $\langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{nm}$, $b\psi_0 = 0$ und $[b, b^\dagger] = 1$.

a) Zeigen Sie, dass $[b,(b^\dagger)^n] = n(b^\dagger)^{n-1}$ und $[b^\dagger, b^n] = -nb^{n-1}$.

b) Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle\psi_n|b^\dagger b|\psi_m\rangle$, $\langle\psi_n|bb^\dagger|\psi_m\rangle$, $\langle\psi_n|(b^\dagger)^2|\psi_m\rangle$ und $\langle\psi_n|b^2|\psi_m\rangle$.

c) Drücken Sie Orts- und Impulsoperator durch b und $b^\dagger$ aus und berechnen Sie für $m = 1,2,3$ die Erwartungswerte $\langle\psi_n|x^m|\psi_n\rangle$ und $\langle\psi_n|p^m|\psi_n\rangle$. Was ergibt sich für das Unschärfeprodukt im $n-$ten Eigenzustand?

d) Zeigen Sie, dass $[b, \exp(\alpha b^\dagger)] = \alpha \exp[\alpha b^\dagger]$ und $[b^\dagger, \exp(\alpha b)] = -\alpha\exp[\alpha b]$. Was ergibt sich daraus für $\exp[-\alpha b^\dagger] b \exp[\alpha b^\dagger]$ und $\exp[-\alpha b] b^\dagger \exp[\alpha b]$?

(8 Punkte)

Aufgabe 30 *Drehimpuls*

Für die in der Vorlesung definierten Eigenfunktionen $Y_{l,m}$ der Operatoren L^2 und L_z gelten die Eigenwertgleichungen

$$\begin{aligned} L_z Y_{l,m} &= \hbar m Y_{l,m} \ , \\ L^2 Y_{l,m} &= \hbar^2 l(l+1) Y_{l,m} \ . \end{aligned}$$

Weiter seien die Leiteroperatoren $L_\pm = L_x \pm iL_x$ gegeben.

a) Zeigen Sie unter alleiniger Verwendung der Kommutatorbeziehungen für Drehimpulsoperatoren sowie der angegebenen Eigenwertgleichungen, dass

$$\begin{aligned} [L^2, L_x] &= 0 \ , [L^2, L_\pm] = 0 \ , \quad [L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm \ , \\ L_+ Y_{l,m} &\sim Y_{l,m+1} \ \text{ falls } m < l \ , \\ L_- Y_{l,m} &\sim Y_{l,m-1} \ \text{ falls } m > -l \ . \end{aligned}$$

b) Drücken Sie L^2 und $L_\pm$ in Kugelkoordinaten aus und zeigen Sie, dass die Funktion $f_l(\theta,\phi) = sin^l(\theta)\exp[il\phi]$ (l eine ganze positive Zahl) den folgenden Gleichungen genügt:

$$\begin{aligned} \Big[L^2(\theta,\phi) - \hbar^2 l(l+1)\Big] f_l(\theta,\phi) &= 0 \ , \\ L_+(\theta,\phi) f_l(\theta,\phi) &= 0 \ . \end{aligned}$$

(6 Punkte)